



Gráfok

2. előadás



Gráfok bejárása



A gráf bejárása = minden elem feldolgozása

Probléma:

- Lineáris elrendezésű sokaság (sorozat) bejárása könnyű, egyetlen ciklussal elvégezhető.
- Hálós struktúra bejárása nem kézenfekvő, többféle stratégiával végezhető.





Gráfok bejárása

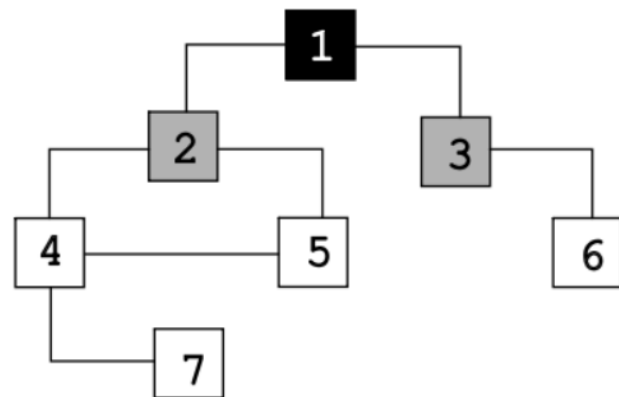


Gráfbejárás:

- kiindulunk egy tetszőleges pontból,
- éleken haladva eljutunk az összes ponthoz.

Demonstrálás színekkel:

- Fehér pontok: ahova még nem jutottunk el.
- Szürkék: ahova már eljutottunk, de még „dolog van vele”.
- Feketék: ahova már eljutottunk, s minden belőlük kivezető élt is megvizsgáltunk.



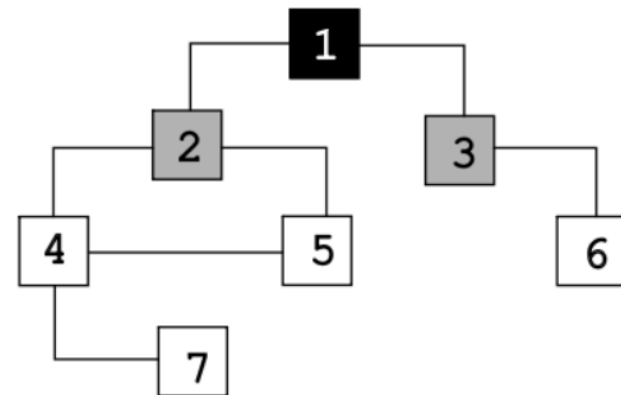


Gráfok bejárása



Demonstrálás színekkel:

- A gráfbejárás kiinduló állapotában egyetlen pont szürke, az összes többi pedig fehér.
- A végállapotban minden pont fekete (ha elérhető a kezdőpontból).



A színekkel tehát a pontok halmazát három részhalmazra bontottuk.

A gráfbejárás pontokat sorol át egyik részhalmazból egy másik részhalmazba (fehérből szürkébe, szürkéből feketébe).

Ehhez a szürkéket vizsgálja!





Gráfok bejárása



Két alapvető stratégia:

- *Szélességi bejárás*: a szürke színűek közül abból lépünk tovább, amelyikbe legrégebben léptünk.
- *Mélységi bejárás*: abból a pontból lépünk mindig tovább, amelyik legkésőbb került a szürke színűek közé.

Mindkét bejárásban a szürkék keletkezési sorrendjét kell követnünk valamilyen módon.

Lehetnek (lesznek) további stratégiák is.



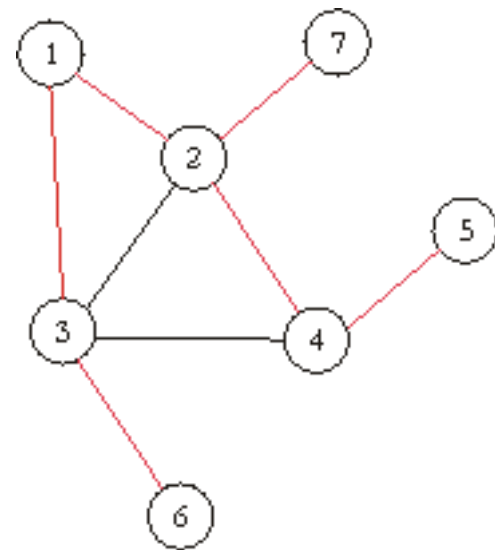


Szélességi bejárás



Szélességi bejárás:

- Adatszerkezet, amiből a legrégebben bekerült lép ki először – sor .
- Tároljuk a szürke pontokat egy sorban!
- Van még feldolgozatlan pont = van még szürke pont = nem üres a sor!
- A bejárás egy feszítőfát hoz létre (szélességi feszítőfa).
- Van kör = van nem piros színű él, azaz szürke pontba vezető.



Sorrend: 1,2,3,4,7,6,5





Szélességi bejárás



Szélességi bejárás (p) :

Szín(p) :=szürke; Sorba(p)

Ciklus amíg nem üresSor?

Sorból(p); Szín(p) :=fekete

Ciklus i=1-től Pontszám-ig

Ha Vanél?(p,i) és Szín(i)=fehér

akkor Sorba(i); Szín(i) :=szürke

Ciklus vége

{Szín(p) :=fekete itt is lehetne}

Ciklus vége

Eljárás vége.



Bejárás csúcsmátrix esetén.

Futási idő: $O(\text{Pontszám}^2)$



Szélességi bejárás



Szélességi bejárás (p) :

Szín(p) :=szürke; Sorba(p)

Ciklus amíg nem üresSor?

Sorból(p); Szín(p) :=fekete

Ciklus i=1-től Szomszédpontokszáma(p) -ig

j:=Szomszéd(p, i)

Ha Szín(j)=fehér

akkor Sorba(j); Szín(j) :=szürke

Ciklus vége

Ciklus vége

Eljárás vége.



Bejárás csúcslista esetén.

Futási idő: $O(\text{Élszám})$



Szélességi bejárás



Szélességi bejárás (p) :

Szín(p) :=szürke; Sorba(p)

Ciklus amíg nem üresSor?

Sorból(p); Szín(p) :=fekete

Ciklus $i \in Ki(p)$

Ha Szín(i)=fehér

akkor Sorba(i); Szín(i) :=szürke

Ciklus vége

Ciklus vége

Eljárás vége.



Bejárás csúcslista esetén.

Futási idő: $O(\text{Élszám})$



Szélességi bejárás



Szélességi bejárás (p) :

Szín(p) :=szürke; Sorba(p); **Honnan(p) :=p**

Ciklus amíg nem üresSor?

Sorból(p); Szín(p) :=fekete

Ciklus $i \in K_i(p)$

Ha Szín(i)=fehér

akkor Sorba(i); Szín(i) :=szürke

Honnan(i) :=p

Ciklus vége

Ciklus vége

Eljárás vége.



Bejárás csúcslista esetén, elérési információval.



Szélességi bejárás



Szélességi bejárás (p) :

Szín(p) :=szürke; Sorba(p); **Táv(p) :=0**

Ciklus amíg nem üresSor?

Sorból(p); Szín(p) :=fekete

Ciklus $i \in K_i(p)$

Ha Szín(i)=fehér

akkor Sorba(i); Szín(i) :=szürke

Táv(i) :=Táv(p) +1

Ciklus vége

Ciklus vége

Eljárás vége.



Bejárás csúcslista esetén, távolság információval.



Szélességi bejárás



Szélességi bejárás (p) :

Szín(p) :=szürke; Sorba(p); **t:=0; Elér(p) :=t**

Ciklus amíg nem üresSor?

Sorból(p); Szín(p) :=fekete

Ciklus $i \in Ki(p)$

Ha Szín(i)=fehér

akkor Sorba(i); Szín(i) :=szürke

t:=t+1; Elér(i) :=t

Ciklus vége

Ciklus vége

Eljárás vége.



Bejárás csúcslista esetén, elérési sorrend információval.



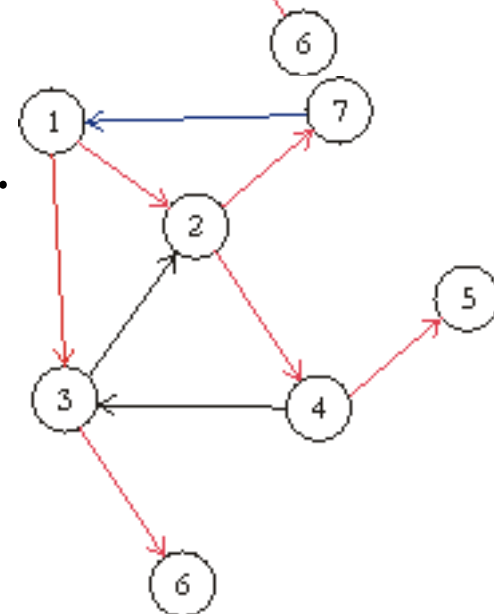
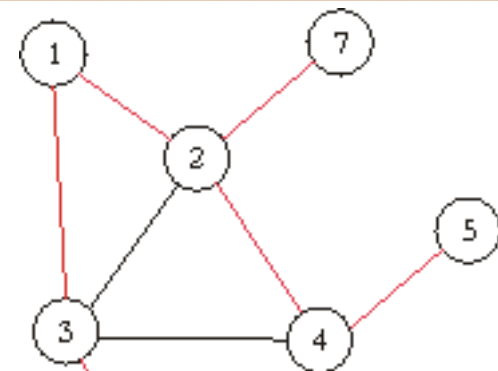
Szélességi bejárás



Élek osztályozása:

- **Fa-él:** szürkéből fehérbe vezet.
- **Visszamutató** él(u,v): szürkéből feketébe vezet és u őse v-nek.
- **Kereszt-él:** szürkéből szürkébe vagy nem őse feketébe vezető élek.

Írányítatlan gráfban csak fa-él és kereszt-él van. Írányított gráfban lehet visszamutató él.





Szélességi bejárás

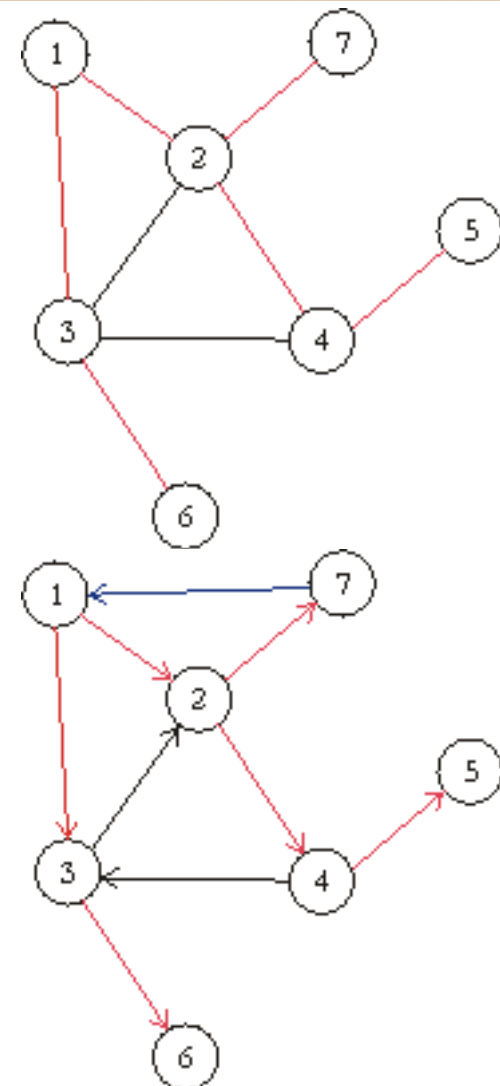


Írányítatlan gráfban:

- $\forall (u, v)$ fa-élre: $Táv(v) = Táv(u) + 1$.
- $\forall (u, v)$ kereszt-élre: $Táv(v) = Táv(u)$
vagy $Táv(v) = Táv(u) + 1$.

Írányított gráfban:

- $\forall (u, v)$ fa-élre: $Táv(v) = Táv(u) + 1$.
- $\forall (u, v)$ kereszt-élre: $Táv(v) \leq Táv(u) + 1$.
- $\forall (u, v)$ visszamutató élre:
 $0 \leq Táv(v) \leq Táv(u)$.



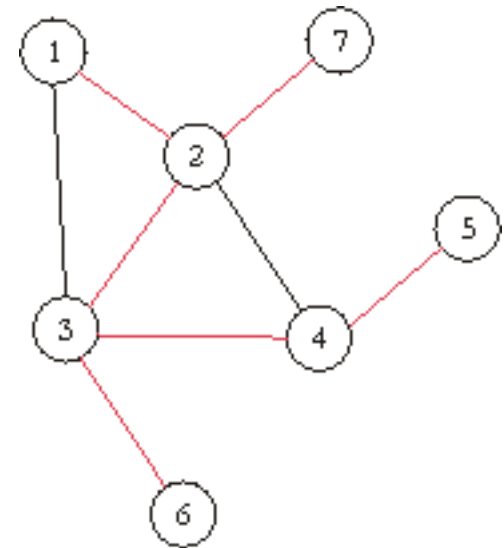


Mélységi bejárás



Mélységi bejárás:

- Adatszerkezet, amiből a legutoljára bekerült lép ki először – verem.
- Tároljuk a szürke pontokat egy veremben!
- Van még feldolgozatlan pont = van még szürke pont = nem üres a verem!
- A bejárás egy feszítőfát hoz létre (mélységi feszítőfa).
- A verem megtakarítható rekurzióval (hiszen azt veremmel valósítjuk meg).



Sorrend: 1,2,3,4,5,6,7





Mélységi bejárás



Mélységi bejárás (p) :

Szín(p) :=szürke

Ciklus i=1-től Pontszám-ig

Ha Vanél?(p,i) és Szín(i)=fehér
akkor Mélységi bejárás(i)

Ciklus vége

Szín(p) :=fekete

Eljárás vége.

Mélységi bejárás indítása (p) :

Szín:=(fehér,...,fehér); Mélységi bejárás(p)

Eljárás vége.

Bejárás csúcsmátrix esetén.

Futási idő: $O(\text{Pontszám}^2)$





Mélységi bejárás



Mélységi bejárás (p) :

Szín(p) :=szürke

Ciklus $i=1$ -től Szomszédpontokszáma (p) -ig

Ha Szín(Szomszéd(p, i)) =fehér

akkor Mélységi bejárás(Szomszéd(p, i))

Ciklus vége

Szín(p) :=fekete

Eljárás vége.

Mélységi bejárás indítása (p) :

Szín:=(fehér,...,fehér); Mélységi bejárás (p)

Eljárás vége.

Bejárás csúcslista esetén.

Futási idő: $O(\text{Élszám})$





Mélységi bejárás



Mélységi bejárás (p) :

Szín(p) :=szürke

Ciklus $i \in K_i(p)$

Ha Szín(i)=fehér akkor Mélységi bejárás(i)

Ciklus vége

Szín(p) :=fekete

Eljárás vége.

Mélységi bejárás indítása (p) :

Szín:=(fehér,...,fehér); Mélységi bejárás(p)

Eljárás vége.



Bejárás csúcslista esetén.

Futási idő: $O(\text{Élszám})$



Mélységi bejárás



Mélységi bejárás (p) :

Szín(p) :=szürke;

Ciklus $i \in K_i(p)$

Ha Szín(i)=fehér

akkor **Honnan(i) :=p**

Mélységi bejárás(i)

Ciklus vége

Szín(p) :=fekete

Eljárás vége.

Mélységi bejárás indítása (p) :

Szín:=(fehér,...,fehér); Honnan(p) :=p

Mélységi bejárás (p)

Eljárás vége.

Bejárás csúcslista esetén, elérési információval.





Mélységi bejárás



Mélységi bejárás (p) :

Szín(p) :=szürke;

Ciklus $i \in K_i(p)$

Ha Szín(i)=fehér

akkor **Táv(i) :=Táv(p) +1**

Mélységi bejárás(i)

Ciklus vége

Szín(p) :=fekete

Eljárás vége.

Mélységi bejárás indítása(p) :

Szín:=(fehér,...,fehér); Táv(p) :=0

Mélységi bejárás(p)

Eljárás vége.

Bejárás csúcslista esetén, távolság információval.





Mélységi bejárás



Mélységi bejárás (p) :

Szín(p) :=szürke; **idő:=idő+1; Elér(p) :=idő**

Ciklus $i \in K_i(p)$

Ha Szín(i)=fehér

akkor Mélységi bejárás(i)

Ciklus vége

Szín(p) :=fekete; **idő:=idő+1; Elhagy(p) :=idő**

Eljárás vége.

Mélységi bejárás indítása(p) :

Szín:=(fehér,...,fehér); idő:=0

Mélységi bejárás(p)

Eljárás vége.

Bejárás csúcslista esetén, elérési és elhagyási idő információval.



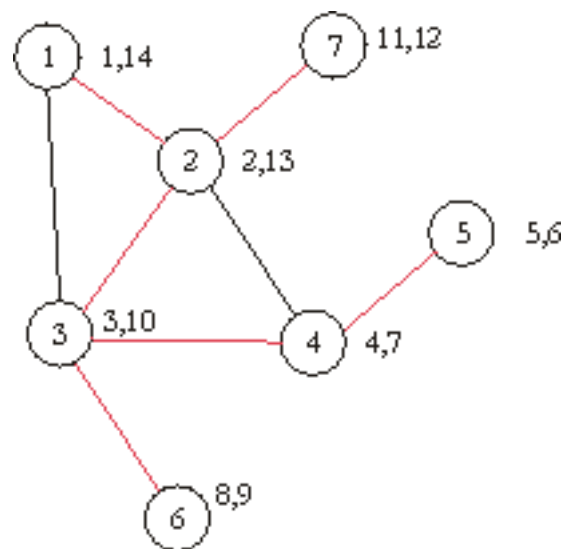


Mélységi bejárás



Pontok osztályozása:

- u őse v -nek a mélységi feszítőfában \Leftrightarrow
 $\text{Elér}(u) < \text{Elér}(v) < \text{Elhagy}(v) < \text{Elhagy}(u)$.
- u és v különböző ágon van a mélységi feszítőfában \Leftrightarrow
 $\text{Elér}(u) > \text{Elhagy}(v)$ vagy $\text{Elér}(v) > \text{Elhagy}(u)$.





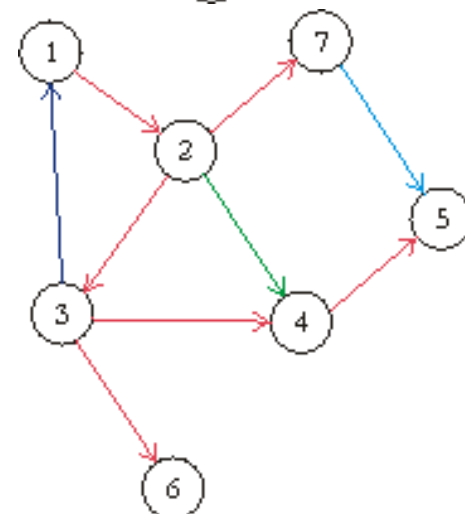
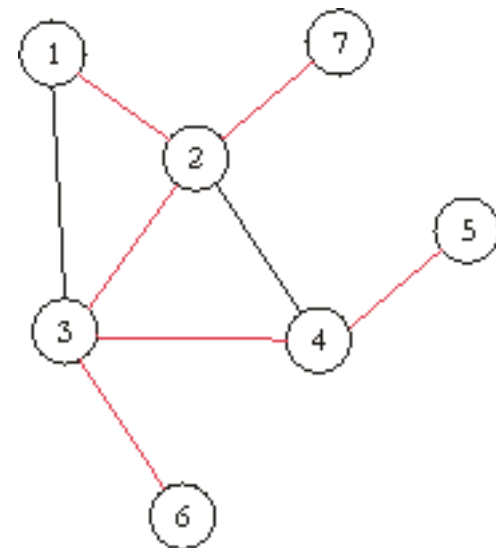
Mélységi bejárás



Élek osztályozása:

- **Fa**-él: szürkéből fehérbe vezet.
- **Visszamutató** él(u,v): szürkéből szürkébe vezet és a fában v őse az u -nak.
- **Előremutató** él(u,v): szürkéből feketébe vezet és v utóda u -nak.
- **Kereszt**-él: szürkéből feketébe vezető élek és v nem utóda u -nak.

Írányítatlan gráfban csak fa-él és visszamutató él van.





Mélységi bejárás



Mélységi bejárás (p) :

Verembe (p) ; Szín (p) :=szürke

Ciklus amíg nem ÜresVerem?

$i := 1$

Ciklus amíg $i \leq \text{Pontszám}$ és (nem Vanél?(p, i)
vagy Szín(i) ≠ fehér)

$i := i + 1$

Ciklus vége

Ha $i \leq \text{Pontszám}$ akkor Verembe (p) ; $p := i$

Szín (p) :=szürke

különben Szín (p) :=fekete; Veremből (p)

Ciklus vége

Eljárás vége.



Bejárás csúcsmátrix esetén, ciklussal.



Mélységi bejárás



Mélységi bejárás (p) :

Verembe (p, 1); Szín(p) :=szürke; $i := 1$

Ciklus amíg nem ÜresVerem?

Ciklus amíg $i \leq \text{Pontszám}$ és (nem Vanél?(p, i)
vagy Szín(i) ≠ fehér)

$i := i + 1$

Ciklus vége

Ha $i \leq \text{Pontszám}$ akkor Verembe (p, $i + 1$); $p := i$
Szín(p) :=szürke; $i := 1$

különben Szín(p) :=fekete; Veremből (p, i)

Ciklus vége

Eljárás vége.



Továbbkeresés keresés helyett.



Bejárások alkalmazásai



Összefüggő-e egy irányítatlan gráf?

Alapötlet: bejárás..., s ha *minden* pontba eljutottunk a bejárás során, akkor *összefüggő*.

Összefüggő? :

```
Szín (1..Pontszám) :=fehér; Bejárás (1)
```

```
i:=1
```

```
Ciklus amíg  $i \leq \text{Pontszám}$  és  $\text{Szín}(i) = \text{fekete}$ 
```

```
   $i := i + 1$ 
```

```
Ciklus vége
```

```
Összefüggő? := ( $i > \text{Pontszám}$ )
```

```
Függvény vége.
```



Kérdés: irányított gráf összefüggő vagy erősen összefüggő?



Bejárások alkalmazásai



Egy irányított gráf programgráf-e?

Programgráf: egyetlen kezdőpontjából el lehet jutni minden pontjába, illetve minden pontjából el lehet jutni az egyetlen végpontba.

Egyetlen kezdőpont: pontosan egy pont befoka 0.

Egyetlen végpont: pontosan egy pont kifoka 0.

Alapötlet: Bejárás a kezdőpontból, s ha *minden* pontba eljutottunk a bejárás során, akkor *az első tulajdonság teljesül.*

Minden él irányát fordítsuk meg, majd bejárás a végpontból.

Ha *minden* pontba eljutottunk, akkor a *második tulajdonság is teljesül.*





Bejárások alkalmazásai



Írányítatlan gráf összefüggő komponensei száma

Alapötlet: bejárás újraindul minden fehérre maradt pontból.

Komponensek száma:

Szín(1..Pontszám) := fehér; Db := 0

Ciklus $i=1$ -től Pontszám-ig

Ha Szín(i)=fehér akkor Db := Db+1; Bejárás(i)

Ciklus vége

Komponensek száma := Db

Függvény vége.





Bejárások alkalmazásai



Írányítatlan gráf összefüggő komponensei

Alapötlet: bejárás újraindul minden fehéren maradt pontból, feketévé válásnál komponens sorszámot tárol.

Bejárás (p , **Db**) :

...

Szín(p) := fekete; **Komponens(p) := Db**

...

Eljárás vége.





Bejárások alkalmazásai



Van-e út 2 pont között

Alapötlet: Az egyik pontból indul a bejárás, ha a másik fekete lesz, akkor van út.

Van út? (p, q) :

Szín(1..Pontszám) := fehér

Bejárás (p)

Van út? := (Szín(q) ≠ fehér)

Függvény vége.

Ötlet: Ha a másik pont szürkévé vált, akkor már tudjuk, hogy van út, befejezhetjük a bejárást:

Ciklus amíg nem Üres...? **és Szín(q)=fehér**



Kérdés – miben más: Van-e kör egy p ponton keresztül?



Bejárások alkalmazásai



Út megadása 2 pont között

Alapötlet: Az egyikből indul a bejárás, ha a másik fekete lesz, akkor van út. Ekkor induljunk visszafelé a célpontból!

Út (p, q) :

Szín(1..Pontszám) :=fehér; Bejárás (p)

Ha Szín (q) =fekete akkor Útkiírás (q, p)

Függvény vége.

Útkiírás (q, p) :

Ha $q \neq p$ akkor Útkiírás (Honnan (q) , p)

Ki: q

Eljárás vége.

Megjegyzés: Minden elért (azaz fekete) pontból bejárhatjuk azt az utat, amin eljutottunk oda.





Bejárások alkalmazásai



Út megadása 2 pont között

Ciklussal, veremléssel:

Útkiírás (q, p) :

Ciklus amíg $q \neq p$

Verembe (V, q) ; $q := \text{Honnan}(q)$

Ciklus vége

Ki: p

Ciklus amíg nem üres? (V)

Veremből (V, q) ; Ki: q

Ciklus vége

Eljárás vége.





Bejárások alkalmazásai



Legrövidebb út megadása 2 pont között

- A szélességi bejárás által megtalált út a legrövidebb út – a bejárás a távolságok szerint hullámfront-szerűen halad.
- A mélységi bejárás által megtalált út nem feltétlenül (sőt általában nem) a legrövidebb út.
- Súlyozott gráfnál (ha a legrövidebb út nem a legkisebb lépésszámú, hanem a legkisebb összhosszúságú) a szélességi bejárás sem ad feltétlenül legrövidebb utat.



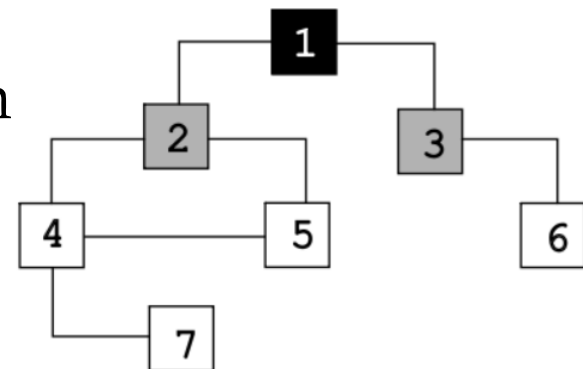


Gráfok bejárása



Demonstrálás színekkel:

- A gráfbejárás kiinduló állapotában egyetlen pont szürke, az összes többi pedig fehér.
- A végállapotban minden pont fekete (ha elérhető a kezdőpontból).



A gráfbejárás pontokat sorol át egyik részhalmazból egy másik részhalmazba (fehérből szürkébe, szürkéből feketébe).

- *Szélességi bejárás*: a szürkék közül abból lépünk tovább, amelyikbe legrégebben léptünk.
- *Mélységi bejárás*: abból a pontból lépünk tovább, amelyik legkésőbb került a szürke színűek közé.

