Gráfok
1. előadás

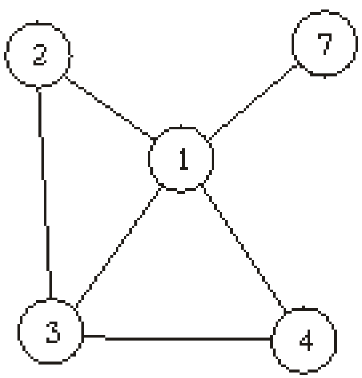
Gráfok

A gráf fogalma:

Gráf(P,E): P *pontok* (*csúcsok*) és $E \subseteq P \times P$ *élek* halmaza

Fogalmak:

- Irányított gráf : $(p_1,p_2) \in E$-ből nem következik, hogy $(p_2,p_1) \in E$
- Irányítatlan gráf : $(p_1,p_2) \in E \rightarrow (p_2,p_1) \in E$
- Út: $(p_1,p_2), (p_2,p_3), \ldots, (p_{k-1},p_k) \in E$ élsorozat
- Kör : $(p_1,p_2), (p_2,p_3), \ldots, (p_{k-1},p_1) \in E$ élsorozat
- Körmentes gráf: E-ben nincs kör
- Hurokél: $(p,p) \in E$



Gráfok

Fogalmak:

- Fok: $p \in P$-hez csatlakozó élek száma irányítatlan gráfban
- Befok, Kifok: egy $p \in P$ pontba bevezető, illetve kivezető élek száma irányított gráfban
- Összefüggő gráf: $\forall p,q \in P$: $\exists$út(p,q) – irányítatlan gráf
- Erősen összefüggő gráf: $\forall p,q \in P$: $\exists$út(p,q) – irányított gráf
- Összefüggő komponens: $(R,F) \subseteq (P,E)$ összefüggő gráf
- Erősen összefüggő komponens: $(R,F) \subseteq (P,E)$ erősen összefüggő irányított gráf

- Összefüggő gráf: $\exists p \in P$: $\forall q \in P$: $\exists$út(p,q) – irányított gráf

Gráfok

Fogalmak:

- Súlyozott gráf: (P,E,$s:E\rightarrow R$ mérték), (P-hez is lehet súly)
- Fa: összefüggő körmentes gráf
- Erdő (liget): körmentes gráf
- Feszítőfa: a gráf összes pontját tartalmazó fa
- Forrás: irányított gráf pontja, amelyből csak kivezető él van
- Nyelő: irányított gráf pontja, amelybe csak bevezető él van
- Háló: körmentes irányított gráf, egy forrással és nyelővel
- Izolált pont: legfeljebb hurokél kapcsolódik hozzá

Gráfok ábrázolása

Csúcsmátrix (szomszédsági mátrix)**:**

$$C(i,j)=\begin{cases} igaz & ha \quad (i,j)\in E \\ hamis & ha \quad (i,j)\notin E \end{cases}$$

Súlyozott gráfra:

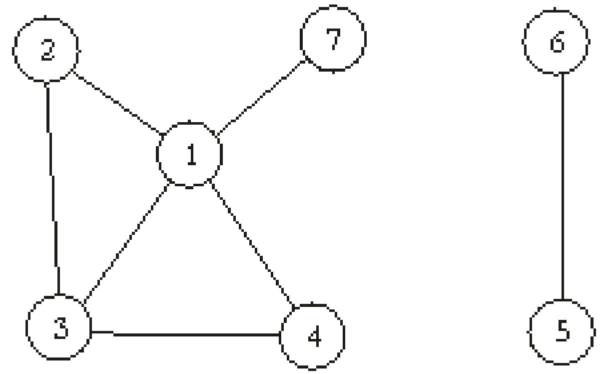
$$C(i,j)=\begin{cases} s(i,j) & ha \quad (i,j)\in E \\ Nemdef & ha \quad (i,j)\notin E \end{cases}$$

Megjegyzés: *Nemdef*= 0 vagy -1 vagy +∞ vagy …

Gráfok ábrázolása

Csúcsmátrix:

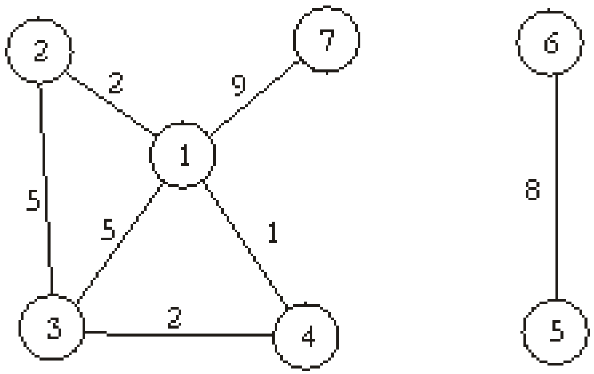
	i	i	i			i
i		i				
i	i		i			
i		i				
					i	
				i		
i						



Gráfok ábrázolása

Csúcsmátrix súlyozott gráfra:

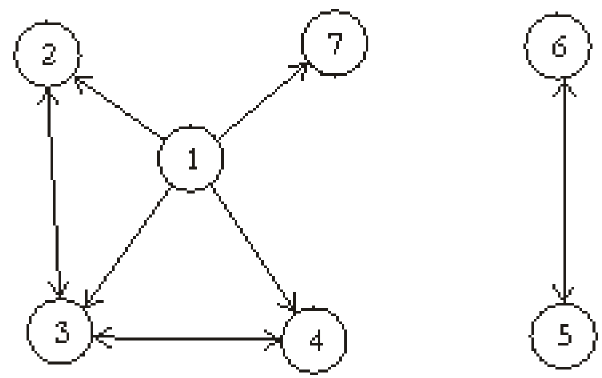
	2	5	1			9
2		5				
5	5		2			
1		2				
					8	
				8		
9						



Gráfok ábrázolása

Csúcsmátrix irányított gráfra:

	i	i	i			i
		i				
	i		i			
		i				
					i	
				i		



Gráfok ábrázolása

Tapasztalatok a csúcsmátrixról:

- irányítatlan gráf esetén szimmetrikus
- irányított gráf esetén nem feltétlenül szimmetrikus
- Fok, Kifok: soronként az igaz értékek száma
- Befok: oszloponként az igaz értékek száma
- könnyű új éleket hozzávenni, éleket törölni, élek súlyát megváltoztatni
- nehéz új pontokat hozzávenni, pontokat törölni
- kevés él esetén memória-pazarló

Gráfok ábrázolása

Csúcslista (szomszédsági lista) – tömbös megvalósítás-ban:

Fok(i), Kifok(i)= az i-ből kivezető élek száma

Ki(i,j)= az i-ből kivezető j. él végpontja

Súlyozott gráfra:

Fok(i), Kifok(i)= az i-ből kivezető élek száma

Ki(i,j).pont= az i-ből kivezető j. él végpontja

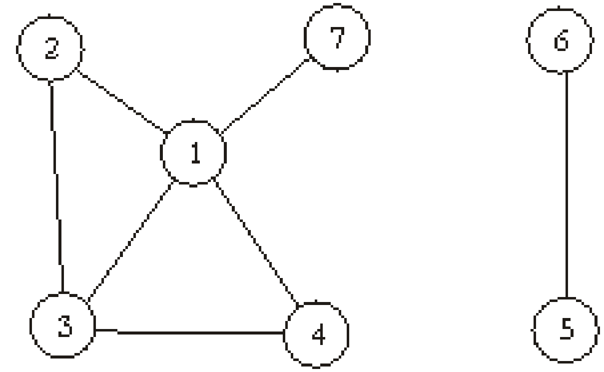
Ki(i,j).súly= az i-ből kivezető j. él súlya

Gráfok ábrázolása

Csúcslista:

4
2
3
2
1
1
1

2	3	4	7
1	3		
1	2	4	
1	3		
6			
5			
1			

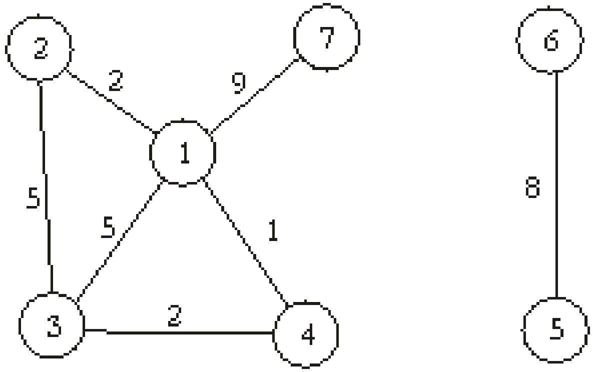


Gráfok ábrázolása

Csúcslista súlyozott gráfra:

4
2
3
2
1
1
1

2,2	3,5	4,1	7,9
1,2	3,5		
1,5	2,5	4,2	
1,1	3,2		
6,8			
5,8			
1,9			

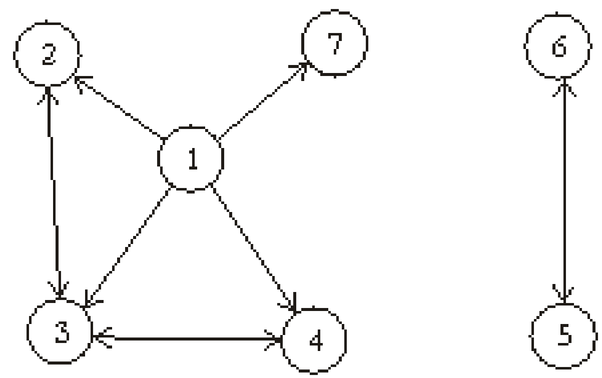


Gráfok ábrázolása

Csúcslista irányított gráfra:

4
1
2
1
1
1
0

2	3	4	7
3			
2	4		
3			
6			
5			



Gráfok ábrázolása

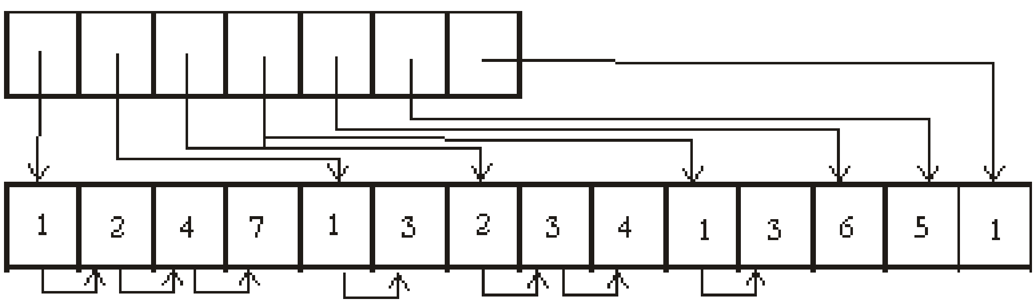
Tapasztalatok a csúcslistáról:

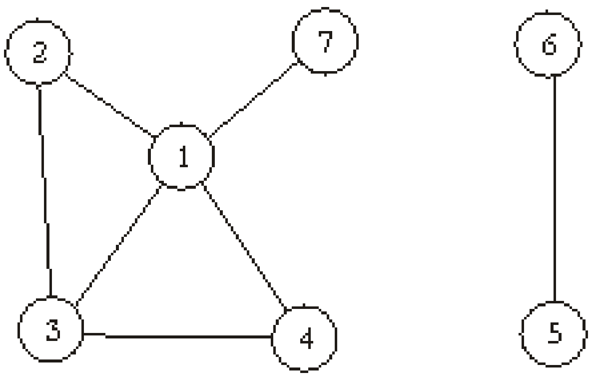
- irányítatlan gráf esetén mindkét végpontnál szerepel a másik
- Fok, Kifok: soronként a darabszám
- Befok: nehezen számítható
- könnyű új éleket hozzávenni, élek súlyát megváltoztatni
- nehéz éleket törölni (sőt irányítatlan gráfnál 2 helyről kell)
- nehéz pontokat törölni
- nagy mátrix kell, ha nincs jó korlát a kivezető élek számára vagy dinamikus méretű tömböket kell használni

Gráfok ábrázolása

Csúcslista (listás megvalósításban):

Ki(i)= az i-ből kivezető élek listája





Gráfok ábrázolása

Éllista (tömbös megvalósításban):

E(i,j)= az i. él j. végpontja (j=1,2)

Súlyozott gráfra:

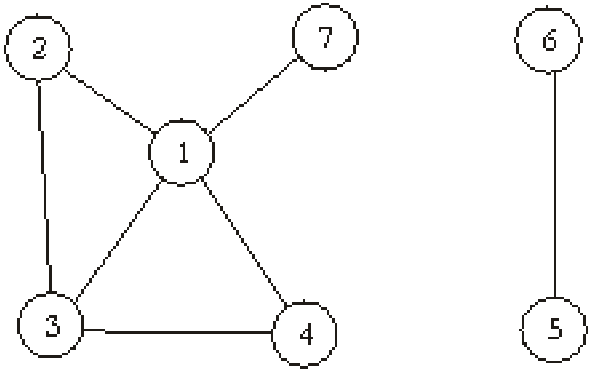
E(i).él(j)= az i. él j. végpontja (*Lehetne: E(i).kezdő, E(i).vég is.*)

E(i).súly= az i. él súlya

Gráfok ábrázolása

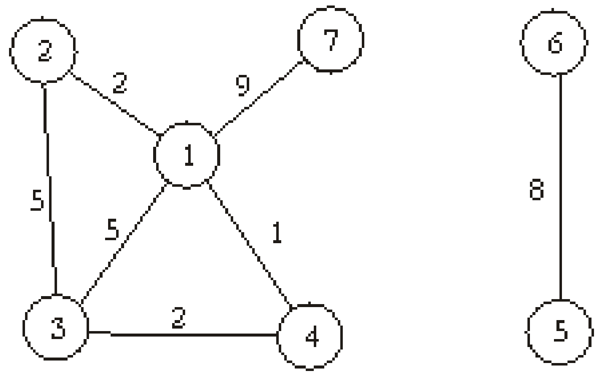
Éllista:

1	2
1	3
1	4
1	7
2	3
3	4
5	6



Éllista súlyozott gráfra:

1	2	2
1	3	5
1	4	1
1	7	9
2	3	5
3	4	2
5	6	8



Gráfok ábrázolása

Tapasztalatok az éllistáról:

- irányítatlan gráf esetén csak egyszer szerepelnek az élek
- könnyű új éleket hozzávenni, élek súlyát megváltoztatni
- nehéz éleket törölni
- nehéz pontokat törölni

Gráfok ábrázolása

Számított gráf

Az élek halmazát nem tároljuk, mert

- van olyan számítási eljárás, amely $\forall p,q \in P$-re kiszámítja Vanél?(p,q)-t;

vagy

- van olyan számítási eljárás, amely $\forall p \in P$-re létrehozza a Ki(p) halmaz elemeit, azaz azon pontokat, ahova p-ből vezet él.

Számított gráf – kannák – számítás

Egy gazdának három különböző űrtartalmú tejeskannája van, amelyekbe teli állapotban A, B és C liter tej fér. Van továbbá egy negyedik kannája, ennek az űrtartalmát nem ismeri, csak azt tudja, hogy ez a legnagyobb kannája. Kezdetben a legnagyobb, ismert űrtartalmú kanna tele van, a többi pedig üres. Add meg, hogy minimum hány lépésben lehet kimérni X liter tejet!

Hol itt a gráf?

Számított gráf – kannák – számítás

A 4 kanna pillanatnyi állapotát az (aa,bb,cc,dd) számnégyes írja le. Ebből elérhető állapotok – szabályos öntések:

- (0,bb+aa,cc,dd), ha bb+aa≤B A-ból mind B-be
- (0,bb,cc+aa,dd), ha cc+aa ≤C A-ból mind C-be
- (0,bb,cc,dd+aa) A-ból mind D-be
- (aa-(B-bb),B,cc,dd), ha a>B-bb A-ból B-t tele
- … …

Azaz olyan pontba vezet él, ahova van szabályos öntés.

Gráfok ábrázolása

Számított gráf – labirintus – síkbeli elrendezés

Egy négyzetrácsos terület bizonyos mezőin akadályok vannak. Egy járművet kell elvezetnünk az (1,1) pontból az (N,M) pontba.

Hol itt a gráf?

A gráf pontjai az (i,j) koordinátájú mezők. Az (i,j) pontból az (i-1,j), (i,j-1), (i+1,j), (i,j+1) pontokba vezet él, ha azok nem akadályok.

Gráfok ábrázolása

A gráftípus (statikus gráf – pontok, élek száma rögzí-tett)**:**

Értékhalmaza:

- `Gráf(Sorozat(TÉl:THossz),`
- `        Sorozat(TPont:TElem))`
- `Változó Pontszám, Élszám: Egész`

Műveletei:

- `Érték(Gráf,Pont)`
- `Vanél?(Gráf,Pont1,Pont2)`
- `Élhossz(Gráf,Pont1,Pont2)`

A pontok sorozata sokszor az 1..N számsorozat.

Gráfok ábrázolása

Műveletei:

- Szomszédpontokszáma(Gráf,Pont)
- Szomszéd(Gráf,Pont,i)
- Elsőszomszéd(Gráf,Pont)
- Következőszomszéd(Gráf,Pont)

Speciális műveletek

- Felépít(Gráf1,Gráf2)
  - éllistából csúcsmátrix
  - éllistából csúcslista (tömbös)
  - éllistából csúcslista (listás)

A szomszéd súlyozatlan gráf esetén egy pont, súlyozott gráf esetén pedig egy rekord, ami a pontot és az oda vezető él súlyát tartalmazza.

Gráfok ábrázolása

Meggondolandók:

- Bizonyos műveletek egyes ábrázolásoknál kézenfekvőek, egyszerűen megvalósíthatók, mások pedig nem.
- Érdemes-e minden műveletet minden ábrázolásra megírni?
  - Ha nem: A gráfábrázoláshoz megvalósított műveletek alapján kiderül, hogy egyes gráf-algoritmusok melyik változata készíthető el.
  - Ha igen: Bármely ábrázolásra bármely gráf-algoritmus változat elkészíthető. Közülük – ha szükséges – hatékonysági szempontok alapján választhatunk.

Gráfok ábrázolása

Felépítés: éllistából csúcsmátrix:

```
Típus
   Éllista=Tömb(1..Maxél:TÉl)
   TÉl=Tömb(1..2:TPont)
   Csúcsmátrix=Tömb(1..Maxpont,1..Maxpont:Logikai)
Változó Élszám,Pontszám: Egész
        Cs: Csúcsmátrix
        Fok,Befok,Kifok: Tömb(1..Maxpont,Egész)
        E: Éllista
```

Gráfok ábrázolása

Felépítés: éllistából csúcsmátrix:

```
Felépít(E,Cs,Fok):
  Cs:=(hamis,…,hamis); Fok():=(0,…,0)
  Ciklus i=1-től Élszám-ig
    Cs(E(i,1),E(i,2)):=igaz
    Cs(E(i,2),E(i,1)):=igaz
    Fok(E(i,1)):=Fok(E(i,1))+1
    Fok(E(i,2)):=Fok(E(i,2))+1
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Beolvasással:

```
Be: x,y
Cs(x,y):=igaz
Cs(y,x):=igaz
Fok(x):=Fok(x)+1
Fok(y):=Fok(y)+1
```

Irányított gráfra:

```
Cs(E(i,1),E(i,2)):=igaz
KiFok(E(i,1)):=KiFok(E(i,1))+1
BeFok(E(i,2)):=BeFok(E(i,2))+1
```

Gráfok ábrázolása

Felépítés: éllistából csúcslista (tömb):

```
Típus
  Éllista=Tömb(1..Maxél:TÉl)
  TÉl=Tömb(1..2:TPont)
  Csúcslista=Tömb(1..Maxpont:
                           Tömb(1..Maxpont:TPont)))
Változó Élszám,Pontszám: Egész
        Ki: Csúcslista
         Fok,Befok,Kifok: Tömb(1..Maxpont,Egész)
         E: Éllista
```

Megjegyzés: Dinamikus tömbök esetén a piros Maxpont nem szükséges.

Gráfok ábrázolása

Felépítés: éllistából csúcslista (tömb):

```
Felépít(E,Ki,Fok):
  Fok():=(0,…,0)
  Ciklus i=1-től Élszám-ig
    Fok(E(i,1)):=Fok(E(i,1))+1
    Fok(E(i,2)):=Fok(E(i,2))+1
    Ki(E(i,1),Fok(E(i,1)):=E(i,2)
    Ki(E(i,2),Fok(E(i,2)):=E(i,1)
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Beolvasással:

```
Be: x,y
Fok(x):=Fok(x)+1
Fok(y):=Fok(y)+1
Ki(x).él(Fok(x)):=y
Ki(y).él(Fok(y)):=x
```

Gráfok ábrázolása

Felépítés: éllistából csúcslista (lista):

```
Típus
  Éllista=Tömb(1..Maxél:TÉl)
  TÉl=Tömb(1..2:TPont)
  Csúcslista=Tömb(1..Maxpont:Lista(TPont))
Változó Élszám,Pontszám: Egész
        Ki: Csúcslista
         Fok,Befok,Kifok: Tömb(1..Maxpont,Egész)
         E: Éllista
```

Gráfok ábrázolása

Felépítés: éllistából csúcslista (lista):

```
Felépít(E,Ki,Fok):
  Ciklus i=1-től Pontszám-ig
    Üres(Ki(i))
  Ciklus vége
  Ciklus i=1-től Élszám-ig
    Beszúrmögé(Ki(E(i,1)),E(i,2))
    Beszúrmögé(Ki(E(i,2)),E(i,1))
    Fok(E(i,1)):=Fok(E(i,1))+1
    Fok(E(i,2)):=Fok(E(i,2))+1
  Ciklus vége
Eljárás vége.
```

Beolvasással:

```
Be: x,y
Beszúrmögé(Ki(x),y)
Beszúrmögé(Ki(y),x)
Fok(x):=Fok(x)+1
Fok(y):=Fok(y)+1
```

Gráfok műveletei

Műveletek csúcsmátrixra:

```
Vanél?(Cs,p,q):
  Vanél?:=Cs(p,q)
Függvény vége.
Élhossz(Cs,p,q):
  Élhossz:=Cs(p,q)
Függvény vége.
```

A többi művelet nehéz, csúcsmátrix esetén nem valósítjuk meg.

Gráfok műveletei

Műveletek csúcslistára (tömb):

```
Szomszédpontokszáma(Ki,p):
  Szomszédpontokszáma:=Fok(p) {vagy Kifok(p)}
Függvény vége.
Szomszéd(Ki,p,i):
  Szomszéd:=Ki(p,i)
Függvény vége.
```

A többi művelet nehéz, csúcslista esetén nem valósítjuk meg.

Gráfok műveletei

Műveletek csúcslistára (lista):

```
Elsőszomszéd(Ki,p):
  Elsőre(Ki(p))
  Elsőszomszéd:=Tartalom(Ki(p)).érték
Függvény vége.
Következőszomszéd(Ki,p):
  Következőre(Ki(p))
  Következőszomszéd:=Tartalom(Ki(p)).érték
Függvény vége.
```

A többi művelet nehéz, csúcslista esetén nem valósítjuk meg.

Szomszédok bejárása:

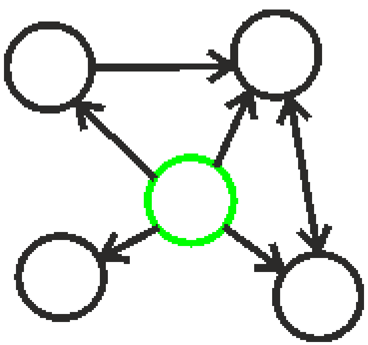
```
Ciklus q∈Ki(p)
  Feldolgoz(q)
Ciklus vége
```

Gráfok alkalmazása

Szuperforrás: belőle mindenhova megy él, bele sehonnan sem – szuperforrás maximum 1 lehet.

Egy pont biztosan nem szuperforrás:

- ha valahova nem megy ki belőle él;
- ha valahonnan jön bele él.



Gráfok alkalmazása

```
Szuperforrás(f,van):
  i:=1; j:=Pontszám
  Ciklus amíg i<j
    Ha Vanél?(i,j) akkor j:=j-1 különben i:=i+1
  Ciklus vége
  f:=i; j:=1; Ha j=f akkor j:=j+1
  Ciklus amíg j≤Pontszám és
                Vanél?(f,j) és nem Vanél?(j,f)
    j:=j+1; Ha j=f akkor j:=j+1
  Ciklus vége
  van:=j>Pontszám
Eljárás vége.
```

Gráfok
1. előadás vége